

Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 10

- (1) In einer Stichprobe mit $n = 10$ Personen werden für X folgende Werte beobachtet: {92; 96; 96; 106; 112; 114; 114; 118; 123; 124}. Sie gehen davon aus, dass Mittelwert und Median in der Population $\mu_0 = \eta_0 = 100$ betragen. Überprüfen Sie, ob die zentrale Tendenz in dieser Stichprobe signifikant von μ_0 bzw. η_0 abweicht. Führen Sie

(a) einen Einstichproben- t -Test (mit der aus den Daten geschätzten Populationsstandardabweichung),

(b) einen Vorzeichentest und

(c) einen Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest durch.

Gehen Sie von einem zweiseitigen Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus.

- (a) Einstichproben- t -Test: Das statistische Hypothesenpaar lautet:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{oder} \quad \mu - \mu_0 = 0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{oder} \quad \mu - \mu_0 \neq 0$$

Der Stichprobenmittelwert liegt in diesem Datenbeispiel bei $\bar{x} = 109,5$. Die Stichprobenstandardabweichung (geschätzte Populationsstandardabweichung) beträgt $\hat{\sigma}_x = 11,52$. Der geschätzte Standardfehler des Mittelwerts beträgt gemäß Formel F 8.23 also $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \hat{\sigma}_x / \sqrt{n} = 11,52 / 3,16 = 3,64$. Damit ergibt sich gemäß Formel F 8.25 ein empirischer t -Wert von $t = (109,5 - 100) / 3,64 = 2,61$. Der kritische t -Wert für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ beträgt bei einem zweiseitigen Test $t_{(0,975;9)} = 2,26$. Der empirische t -Wert ist größer als der kritische Wert und liegt damit im Ablehnungsbereich unter der Nullhypothese; die H_0 kann also verworfen werden.

- (b) Vorzeichentest: Das statistische Hypothesenpaar lautet:

$$H_0: \eta = \eta_0 \quad \text{oder} \quad \eta - \eta_0 = 0$$

$$H_1: \eta \neq \eta_0 \quad \text{oder} \quad \eta - \eta_0 \neq 0$$

Zunächst muss der Wert der Prüfgröße S , d. h. die Anzahl aller Fälle, die einen Wert haben, der unterhalb des angenommenen Populationsmedians unter der Nullhypothese ($\eta_0 = 100$) liegt, bestimmt werden. Dies trifft auf $s = 3$ Fälle zu ($x_1 = 92$; $x_2 = 96$; $x_3 = 96$). Unter der Nullhypothese ($\pi_0 = 0,5$) würde man $n \cdot 0,5 = 10 \cdot 0,5 = 5$ Fälle erwarten. Der empirische Wert schneidet unter der Binomialverteilung einen Flächanteil von $p = P(s \leq 3 \mid \pi_0 = 0,5; n = 10) = 0,1719$ nach links ab (vgl. Tabelle A.1 in Anhang A). Die H_0 kann nicht verworfen werden.

- (c) Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest: Das statistische Hypothesenpaar entspricht dem des Vorzeichentests (s. o.). Um die Prüfgröße W^+ zu ermitteln, muss zunächst für jeden x_m -Wert die Differenz zum theoretisch postulierten Populationsmedian ($\eta_0 = 100$) berechnet werden. Anschließend werden den Absolutbeträgen dieser Differenzen Rangplätze in aufsteigender Reihenfolge zugewiesen. Schließlich wird die Summe jener Rangplätze gebildet, deren Differenzwert positiv war.

m	x_m	d_m	$ d_m $	Rang
1	92	-8	8	4
2	96	-4	4	1,5
3	96	-4	4	1,5
4	106	+6	6	3
5	112	+12	12	5
6	114	+14	14	6,5
7	114	+14	14	6,5
8	118	+18	18	8
9	123	+23	23	9
10	124	+24	24	10

Dies trifft auf sieben Fälle (x_4 bis x_{10}) zu. Die Summe der entsprechenden Rangplätze ist $w^+ = 48$. Mit Hilfe von Tabelle A.4 in Anhang A lässt sich der kritische Wert für w^+ bei $n = 10$ bei $\alpha = 0,05$ (zweiseitiger Test, daher muss das 0,975-Quantil abgelesen werden!) ermitteln. Er beträgt $w_{(0,975)}^+ = 45$. Unser empirisch ermittelter Wert liegt darüber. Die Nullhypothese kann verworfen werden.

- (2) Ein Forscher möchte testen, ob es innerhalb der Mitglieder der politischen Partei »Pfr« (Partei für Reiche) eine größere Heterogenität in Bezug auf die Einstellung gegenüber der Globalisierung gibt als in der Gesamtbevölkerung. Die Einstellung gegenüber der Globalisierung (X) wird mit Hilfe eines entsprechenden Fragebogeninstruments gemessen. Die Werte reichen von -5 (starke Ablehnung) bis +5 (starke Befürwortung). In einer Stichprobe von $n = 120$ Mitgliedern der Partei Pfr wird ein Mittelwert von $\bar{x} = 2$ und eine Stichprobenvarianz von $\hat{\sigma}_x^2 = 12,10$ ermittelt. Der Forscher vermutet, dass das Merkmal in der Population normalverteilt mit $\mu_0 = -0,5$ und $\sigma_0^2 = 10$.

- (a) Testen Sie, ob die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}_x^2$ signifikant größer ist als die postulierte Populationsvarianz σ_0^2 ($\alpha = 5\%$; einseitiger Test).

Das statistische Hypothesenpaar lautet hier:

$$H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} \leq 1$$

$$H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} > 1$$

Zunächst muss nach Formel F 10.14d der Wert der Prüfgröße χ^2 berechnet werden. Hierfür ergibt sich $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\sigma_0^2} \cdot (n-1) = \frac{12,1}{10} \cdot 119 = 144$. Der kritische Wert beträgt $\chi_{(0,95;119)}^2 = 145,5$. Der empirische χ^2 -Wert liegt (sehr knapp) unterhalb des kritischen Wertes; die Nullhypothese kann daher also nicht abgelehnt werden.

(b) Wie groß ist die empirische Effektgröße? Wo liegen die Grenzen des zweiseitigen 90%-Konfidenzintervalls für diese Effektgröße?

Die empirische Effektgröße lautet in diesem Beispiel $v = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_0^2} = \frac{12,1}{10} = 1,21$. Hieraus ergeben sich nach Formel F 10.20a die Grenzen des zweiseitigen 95%-Konfidenzintervall wie folgt:

$$v_u = \frac{v}{\chi_{(0,95; 119)}^2} \cdot (n-1) = \frac{1,21}{145,46} \cdot 119 = 0,99 \quad \text{und} \quad v_o = \frac{v}{\chi_{(0,05; 119)}^2} \cdot (n-1) = \frac{1,21}{94,81} \cdot 119 = 1,52.$$

Ein Bereich zwischen 0,99 und 1,52 überdeckt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% den wahren Populationseffekt v . Der Wert 1 liegt gerade noch in diesem Konfidenzintervall; das korrespondiert mit dem Ergebnis des statistischen Tests aus Aufgabe (a): Die geschätzte Populationsvarianz ist gerade nicht signifikant größer als die unter der Nullhypothese postulierte Populationsvarianz.

(c) Wenn wir die gerade ermittelte empirische Effektgröße als Schätzer für den Populationseffekt verwenden: Wie groß war die Wahrscheinlichkeit, diesen Effekt zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt?

Hier ist nach der Teststärke für den chi-quadrat-Test mit $\alpha = 5\%$ (einseitiger Test), $n = 120$ und $\hat{v} = 1,21$ gefragt. Mit Hilfe des Programms G*Power (Testfamilie: χ^2 ; Statistischer Test: Varianz – Abweichung von einer Konstante [Einstichprobenfall]; Poweranalysetyp: Post hoc) ermitteln wir eine Teststärke von $1 - \beta = 0,45$. Die Chance, einen Effekt der Größe $\hat{v} = 1,21$ mit einer Stichprobengröße von $n = 120$ zu finden, oder – genauer gesagt – die Wahrscheinlichkeit, mit der der chi-quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ (einseitiger Test) bei $n = 120$ Personen signifikant wird, wenn der Populationseffekt $\hat{v} = 1,21$ beträgt, ist mit 45% relativ gering.

(d) Wie viele Personen hätte man benötigt, um den geschätzten Populationseffekt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \beta = 90\%$ zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt?

Hier ist nach der optimalen Stichprobengröße für den chi-quadrat-Test mit $\alpha = 5\%$ (einseitiger Test), $1 - \beta = 90\%$ und $\hat{v} = v_1 = 1,21$ gefragt. Mit Hilfe des Programms G*Power ermitteln wir einen Wert von $n = 470$. So viele Personen hätte man benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \beta = 90\%$ einen Effekt von $\hat{v} = v_1 = 1,21$ zu finden, wenn es diesen Effekt tatsächlich geben sollte.

(3) Im Abschnitt zum Binomialtest auf Abweichung einer Wahrscheinlichkeit von einer fixen theoretischen Wahrscheinlichkeit (Kapitel 10.4) hatten wir als Beispiel die Fragestellung herangezogen, ob man sich in der ersten Jahreshälfte eher verliebt als in der zweiten. In unserem Datenbeispiel mit $n = 300$ Paaren und einer Häufigkeit von $n_1 = 182$ ($h_1 = 0,607$) ergab sich bei $H_0: \pi_0 = 0,5$ ein signifikantes Ergebnis.

(a) Wo liegen die Grenzen des zweiseitigen 90 %-Konfidenzintervalls für die Wahrscheinlichkeit π ?

Die Grenzen des zweiseitigen 90 %-Konfidenzintervalls bestimmen wir mit Hilfe der Formeln F 10.23 und F 10.24. In unserem Beispiel erhalten wir folgende Werte:

$$\pi_u = \frac{2 \cdot 300 \cdot 0,607 + 2,71 - 1,65 \cdot 17}{2 \cdot (300 + 2,71)} = 0,56 \quad \text{und} \quad \pi_o = \frac{2 \cdot 300 \cdot 0,607 + 2,71 + 1,65 \cdot 17}{2 \cdot (300 + 2,71)} = 0,65.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % wird also die »wahre« Wahrscheinlichkeit π von dem Intervall $[0,56; 0,65]$ überdeckt. Der Wert 0,5 liegt nicht mehr im Konfidenzintervall; das korrespondiert mit dem signifikanten Testergebnis.

(b) Wie groß ist in diesem Beispiel die empirische Effektstärke g ?

Die empirische Effektstärke beträgt in diesem Beispiel $g = h_1 - \pi_0 = 0,607 - 0,5 = 0,107$.

(c) Wie viele Paare hätte man benötigt, um unter der Annahme, es gebe einen Effekt der Größe $\gamma_1 = 0,25$ in der Population, mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \beta = 95\%$ die Nullhypothese ablehnen zu können ($\alpha = 5\%$, einseitiger Test)?

Dies können wir bspw. mit Hilfe des Programms G*Power bestimmen (Testfamilie: Exakt; Statistischer Test: Verhältnisse, Abweichungen von einer Konstanten [Binomialtest, Einstichprobenfall]; Poweranalysetyp: A priori). Wir geben in den Feldern folgende Werte ein: Einseitiger Test (Tails: One); Effektgröße: $\gamma_1 = 0,25$; Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$; Power: $1 - \beta = 0,95$; Fixer Wert (Constant proportion): $\pi_0 = 0,5$. Als optimale Stichprobengröße erhalten wir $n = 42$. Diese Größe hätte ausgereicht, um den Effekt zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt.

(4) In Abschnitt 10.5 hatten wir zur Veranschaulichung des KS-Anpassungstests das Datenbeispiel aus Abschnitt 6.4.1 verwendet. Die Originaldaten finden Sie in den Online-Materialien als Excel-Datei (»daten61.xls«). Öffnen Sie diese Datei in Excel und führen Sie einen KS-Anpassungstest in den in Abschnitt 10.5 genannten Schritten durch. Prüfen Sie, ob die Abweichung von der Normalverteilung auf dem 10 %-Niveau signifikant ist. Lesen Sie dann die Daten in ein Statistikprogramm (z. B. R, SPSS) ein und lassen Sie sich das Ergebnis des KS-Anpassungstests ausgeben. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Liest man die primäre Häufigkeitsverteilung (aus Tabelle 6.10) in ein Tabellenkalkulationsprogramm (z. B. Excel) ein, ermittelt die Verteilungsfunktion der beobachteten 62 Merkmalausprägungen und vergleicht diese mit der Verteilungsfunktion dieser Werte unter einer theoretischen Normalverteilung, so erhält man die folgende Tabelle:

Ausprägung (a_j)	Absolute Häufigkeit n_j	Relative Häufigkeit h_j	Empirische Verteilungsfunktion $F(a_j)$	Theoretische Verteilungsfunktion $\Phi_0(a_j)$	Differenz D_j	Differenz D'_j
30	1	0,007	0,007	0,010	0,004	0,010
31	0	0,000	0,007	0,012	0,005	0,005
32	2	0,013	0,020	0,014	0,006	0,008
33	0	0,000	0,020	0,017	0,003	0,003
34	1	0,007	0,027	0,020	0,007	0,000
35	0	0,000	0,027	0,023	0,004	0,004
36	2	0,013	0,040	0,026	0,014	0,000
37	1	0,007	0,047	0,030	0,016	0,010

38	1	0,007	0,053	0,035	0,018	0,012
39	2	0,013	0,067	0,040	0,026	0,013
40	0	0,000	0,067	0,046	0,021	0,021
41	2	0,013	0,080	0,052	0,028	0,014
42	3	0,020	0,100	0,059	0,041	0,021
43	2	0,013	0,113	0,067	0,046	0,033
44	0	0,000	0,113	0,076	0,037	0,037
45	1	0,007	0,120	0,085	0,035	0,028
46	2	0,013	0,133	0,096	0,038	0,024
47	2	0,013	0,147	0,107	0,040	0,027
48	1	0,007	0,153	0,119	0,035	0,028
49	2	0,013	0,167	0,132	0,035	0,022
50	4	0,027	0,193	0,146	0,048	0,021
51	2	0,013	0,207	0,161	0,046	0,033
52	1	0,007	0,213	0,176	0,037	0,030
53	3	0,020	0,233	0,193	0,040	0,020
54	1	0,007	0,240	0,211	0,029	0,022
55	3	0,020	0,260	0,230	0,030	0,010
56	1	0,007	0,267	0,249	0,017	0,011
57	3	0,020	0,287	0,270	0,017	0,003
58	1	0,007	0,293	0,291	0,002	0,004
59	4	0,027	0,320	0,313	0,007	0,020
60	1	0,007	0,327	0,336	0,009	0,016
61	3	0,020	0,347	0,359	0,012	0,032
62	2	0,013	0,360	0,383	0,023	0,036
63	3	0,020	0,380	0,407	0,027	0,047
64	1	0,007	0,387	0,432	0,045	0,052
65	1	0,007	0,393	0,456	0,063	0,070
66	2	0,013	0,407	0,482	0,075	0,088
67	9	0,060	0,467	0,507	0,040	0,100
68	3	0,020	0,487	0,532	0,045	0,065
69	2	0,013	0,500	0,557	0,057	0,070
70	4	0,027	0,527	0,582	0,055	0,082

71	5	0,033	0,560	0,606	0,046	0,079
72	4	0,027	0,587	0,630	0,043	0,070
73	6	0,040	0,627	0,654	0,027	0,067
74	4	0,027	0,653	0,677	0,023	0,050
75	5	0,033	0,687	0,699	0,012	0,046
76	3	0,020	0,707	0,720	0,014	0,034
77	4	0,027	0,733	0,741	0,008	0,035
78	3	0,020	0,753	0,761	0,008	0,028
79	5	0,033	0,787	0,780	0,006	0,027
80	4	0,027	0,813	0,799	0,015	0,012
81	3	0,020	0,833	0,816	0,018	0,002
82	2	0,013	0,847	0,832	0,015	0,001
83	3	0,020	0,867	0,847	0,019	0,001
84	1	0,007	0,873	0,862	0,011	0,005
85	2	0,013	0,887	0,875	0,011	0,002
86	2	0,013	0,900	0,888	0,012	0,001
87	1	0,007	0,907	0,899	0,007	0,001
88	2	0,013	0,920	0,910	0,010	0,003
89	2	0,013	0,933	0,920	0,014	0,000
90	1	0,007	0,940	0,929	0,011	0,005
91	2	0,013	0,953	0,937	0,016	0,003
92	2	0,013	0,967	0,944	0,022	0,009
93	2	0,013	0,980	0,951	0,029	0,016
94	0	0,000	0,980	0,957	0,023	0,023
95	1	0,007	0,987	0,963	0,024	0,017
96	1	0,007	0,993	0,967	0,026	0,019
97	0	0,000	0,993	0,972	0,022	0,022
98	1	0,007	1,000	0,976	0,024	0,018

Die maximale absolute Abweichung liegt für die oberen Kategoriengrenzen bei $D_j = 0,075$ und für die unteren Kategoriengrenzen bei $D_j = 0,1$ (die beiden Zellen sind in der Tabelle blau gefärbt). Dieser letzte Wert ist der Wert der Prüfgröße: $D_{\max} = 0,1$. Der kritische Wert für ein α -Niveau von 10 % und $n = 150$ lässt sich mit Hilfe der Formel $D_{\max}^{\text{krit}} = \frac{1,22}{\sqrt{150}} = \frac{1,22}{12,25} = 0,0996$ bestimmen. Der empirisch er-

mittelte Wert der Prüfgröße liegt knapp oberhalb des kritischen Wertes von 0,09966. Die Nullhypothese, der zufolge das Merkmal in der Population normalverteilt ist, muss also (knapp) abgelehnt werden. Zu dem gleichen Ergebnis kommt man, wenn man den KS-Anpassungstest mit Hilfe des Statistikprogramms SPSS durchführt: Unter »Analysieren« – »Nichtparametrische Tests« – »Eine Stichprobe« kann man den KS-Test durchführen und dabei den Populationsmittelwert und die Populationsstandardabweichung angeben (in unserem Beispiel $\mu = 66,733$ und $\sigma = 15,86$; siehe Abschnitt 10.6; Seite 296 im Buch).

Dann ergibt sich folgendes Testergebnis:

Hypothesentestübersicht

	Nullhypothese	Test	Sig.	Entscheidung
1	Die Verteilung von V1 ist eine Normalverteilung mit dem Mittelwert 66,733 und der Standardabweichung 15,86.	Kolmogorov-Smirnov-Test bei einer Stichprobe	,099	Nullhypothese beibehalten

Asymptotische Signifikanzen werden angezeigt. Das Signifikanzniveau ist ,05.